ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Г.И. Синкевич
доктор физ.-мат. наук
профессор кафедры математики
Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
Санкт-Петербург, Российская Федерация

ВТОРАЯ ЧАСТЬ РЕЧИ ЯКОБА ГЕРМАНА «О ВОЗНИКНОВЕНИИ И РАЗВИТИИ ГЕОМЕТРИИ» НА ЗАСЕДАНИИ ПЕТЕРБУРГСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК 1 АВГУСТА 1726 г. ПРОДОЛЖЕНИЕ. НАЧАЛО В ПРЕДЫДУЩЕМ НОМЕРЕ*

Выступая на открытом заседании Петербургской Академии наук в присутствии Екатерины I и ее свиты, Якоб Герман выразил восхищение гением основателя Академии Петра I, пригласившего в Академию иностранных ученых, а также мудростью и покровительством продолжательницы его дела императрицы Екатерины I. После этой обязательной части Герман рассказал об истории античной геометрии и развитии ее идей вплоть до XVI века.

В публикуемой здесь второй части речи Герман подводит итог роли античной геометрии и переходит к периоду зарождения и формирования инфинитезимального анализа. Начинает с исследований и открытий Ф. Виета, Дж. Непера, переходит к геометрии неделимых Б. Кавальери и Э. Торричелли и развитию их методов в трудах Грегори Сен-Винсента. Вместе с трудами Х. Гюйгенса и Б. Паскаля они составили основу учения Г.-В. Лейбница. Герман говорит о роли Р. Декарта, подробно характеризуя метод в его «Геометрии». Анализирует труды Б. Паскаля по вычислению квадратур, прежде всего циклоиды, и подробно останавливается на его мистификации с наградой за решение задач о циклоиде. Рассматривает геометрический метод рядов Валлиса, признает, что с его помощью можно было решить большинство задач того времени, «можно сделать вывод о превосходстве этого метода и его широкой общности. Однако прискорбно, что этот метод лишь условно геометрический, приближенный, против него возражали Ферма и другие». Указывает на последние достижения Я. Бернулли, Р. де Монмора, Б. Тейлора, а также академиков Петербургской академии наук Х. Гольдбаха и Ф. Майера, открывших методы суммирования любого ряда фигурных чисел. Это рассуждение Герман завершает словами: «На мой взгляд, геометрический метод суммирования всех видов величин, изменяющихся по определенному закону, должен высоко цениться, когда из простого созерцания открывается вид искомых сумм, ибо это имеет особую элегантность, с чем мы почти не встречаемся при арифметическом рассмотрении этих вопросов. Многие примеры этого геометрического метода встречаются как в работах Кавальери, Стефани де Анжелиса и Гвидона Гранди, так и в обширном труде Григория Сен Винсента о конических сечениях, и особенно в Уроках геометрии (Lectionibus Geometricis) Исаака Барроу, где есть много зачатков высшей геометрии».

Подведя итоги этому периоду, Герман переходит к обобщающему методу Лейбница, опубликованному в 1684 г. Герман рассказывает о трудах И. Ньютона, начиная с его «Математических начал натуральной философии» 1687 г.; указывает различия в методах Лейбница и Ньютона и заключает: «Жизнь такова, что как метод дифференциального исчисления в стиле Лейбница, так и метод флюксий Ньютона, прекрасны тем, что ведут нас к истинам, недостижимым прежними методами, и даже когда истинность следует из других соображений, они дают подтверждения».

Речь Германа – это речь очевидца процесса творения математического анализа и дискуссий вокруг него, он приводит множество математических фактов, имен и событий, чему он был свидетелем, сохраняя объективность и беспристрастность. Рассказывает о роли братьев Бернулли в распространении учения Лейбница, о многочисленных прикладных задачах, явившихся стимулом развития этого учения, а также о знаменитом споре о приоритете между последователями Ньютона и Лейбница.

Ключевые слова: *Якоб Герман, Петербургская академия, античная математика.*

G.I. Sinkevich
Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor
Department of Mathematics
St. Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering
Saint-Petersburg, Russian Federation

THE SECOND PART OF JACOB HERMANN'S SPEECH «ON THE ORIGIN AND DEVELOPMENT OF GEOMETRY» AT A MEETING OF THE ST. PETERSBURG ACADEMY OF SCIENCES ON AUGUST 1, 1726. CONTINUATION. STARTED IN THE PREVIOUS ISSUE

* Перевод и примечания Г.И. Синкевич

Speaking at an open session of the St. Petersburg Academy of Sciences in the presence of Catherine I and her retinue, Jacob Hermann expressed admiration for the genius of the founder of the Academy, Peter I, who invited foreign scientists to the Academy, as well as the wisdom and patronage of the continuer of his work, Empress Catherine I. After this obligatory part, Hermann spoke about the history of ancient geometry and the development of its ideas up to the 16th century. In the second part of the speech published here, Hermann sums up the role of ancient geometry and moves on to the period of the origin and formation of infinitesimal analysis. He begins with the research and discoveries of F. Vieta, J. Napier, moves on to the geometry of indivisibles of B. Cavalieri and E. Torricelli and the development of their methods in the works of Gregory of Saint-Vincent. Together with the works of H. Huygens and B. Pascal, they formed the basis of the teachings of G.-W. Leibniz. Hermann talks about the role of R. Descartes, describing in detail the method in his "Geometry". Analyzes the works of B. Pascal on calculating quadratures, primarily the cycloid, and dwells in detail on his mystification with a reward for solving problems on the cycloid. Considers the geometric method of Wallis series, admits that with its help it was possible to solve most of the problems of that time, "one can conclude about the superiority of this method and its wide generality. However, it is regrettable that this method is only conditionally geometric, approximate, Fermat and others objected to it." Points to the latest achievements of J. Bernoulli, R. de Montmort, B. Taylor, as well as academicians of the St. Petersburg Academy of Sciences H. Goldbach and F. Mayer, who discovered methods for summing any series of figurate numbers. Herman concludes this reasoning with the words: "In my opinion, the geometric method of summing all types of quantities changing according to a certain law should be highly valued when a simple contemplation reveals the type of the desired sums, for this has a special elegance, which we almost never encounter in the arithmetic consideration of these issues. Many examples of this geometrical method are found in the works of Cavalieri, Stefani de Angelis, and Guido Grandi, as well as in the extensive work of Gregory of Saint Vincent on conic sections, and especially in the Lectionibus Geometricis of Isaac Barrow, where there are many rudiments of higher geometry." Having summed up this period, Hermann passes on to the generalized method of Leibniz, published in 1684. Hermann talks about the works of I. Newton, beginning with his "Mathematical Principles of Natural Philosophy" of 1687; he points out the differences in the methods of Leibniz and Newton, and concludes: "Life is such that both the method of differential calculus in the style of Leibniz and the method of fluxions of Newton are beautiful in that they lead us to truths unattainable by previous methods, and even when the truth follows from other considerations, they provide confirmations." Hermann's speech is the speech of an eyewitness of the process of creation of mathematical analysis and discussions around it, he cites many mathematical facts, names and events, which he witnessed, maintaining objectivity and impartiality. He talks about the role of the Bernoulli brothers in the dissemination of Leibniz's teaching, about numerous applied problems that were the stimulus for the development of this teaching, as well as about the famous dispute about priority between the followers of Newton and Leibniz.

Keywords: *Jacob Hermann, St. Petersburg Academy, ancient mathematics.*

DOI: 10.25791/intstg.11.2024.1509

SERMONES
in secundo solenni
ACADEMIAE Scientiarum IMPERIALIS
CONVENTU
die I. Augusti
anni MDCCXXVI.
publice recitati.
PETROPOLI
Typis Academiae Scientiarum
Речи, публично прозвучавшие
на втором торжественном заседании
Императорской Академии наук
1 августа1726 года
Издано в Санкт-Петербурге
в типографии Академии наук
Перевод и комментарии Г.И. Синкевич
ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕЧИ Я. ГЕРМАНА
«О ПРОИСХОЖДЕНИИ И РАЗВИТИИ
ГЕОМЕТРИИ». ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Фактически, с прошлого столетия сохранились только четыре первых книги *Коник* Аполлония[i], а остальные считались утерянными, но в библиотеке Медичи выдающийся муж Альфонсо Борелли[ii] случайно обнаружил хорошо сохранившиеся рукописи, и трудами Авраама Эчелленсиса (Abraham Ecchellensis)[iii] они были переведены с арабского и изданы на латыни во Флоренции. Та же самая книга Аполлония *Отсечение отношения* считалась утерянной до тех пор, пока много лет назад благородный Эдм. Галлей не обнаружил ее на арабском языке в Бодлианской библиотеке и издал на латыни в 1705 году в Оксфорде.

До сих пор я подробно рассказывал состояние геометрии древних. Все их открытия содержались либо в *Началах* Евклида и Гипсикла[iv], либо в *Кониках* Аполлония, либо в трудах Архимеда. Действительно, среди них есть такие, которые можно назвать наиболее фундаментальными вопросами геометрии, например, касающиеся сферы и цилиндра, а также размеров круга, параболы и спирали; но они слишком ограничены и заключены в узкие рамки, так что заслуживают объединения с более поздними открытиями, особенно после того, как были открыты новые инфинитезимальные методы. Точно так же обстоит дело и с изобретениями Феодосия и Менелая в отношении учения о сферах, исчисления хорд и сферических треугольников, поскольку все эти изобретения их современников были сведены как к большей простоте вычислений, так и к большей эффективности. Что касается учения о конических сечениях, открытых Аполлонием, то много дополнений было сделано в сочинениях Мидоргия, Вивиани, де ла Гира и особенно Григория Сен-Винсента, который не только более аккуратно и изящно доказал то, что уже было найдено, но и ввел совершенно новые их свойства, до сих пор совершенно неизвестные. Среди них одно, по-видимому, обладает первым замечательным свойством площади между гиперболой и ее асимптотой, поскольку существует замечательная аналогия между этими площадями и логарифмами, а также между ординатами в этих площадях, ограниченных асимптотами и значениями соответствующих логарифмов[1]. Но, разумеется, обращаясь к древним, мы не можем упрекать их в том, что они не продвинулись дальше: ибо все понятия, прежде чем они достигнут какой-либо степени совершенства, должны пройти через более низкие ступени; и, таким образом, несомненно, более поздние поколения, обогатившие геометрию столькими превосходными изобретениями, вряд ли продвинулись бы дальше, чем древние, если бы они жили в те времена и в тех же обстоятельствах. Тогда, по-видимому, препятствием явилась педантичная уверенность древних в доказательстве того, что плоды геометрии не следует распространять дальше; ибо они предпочитали безопасно плавать в берегах геометрии, чем отправлять науку в дальнее плаванье, чреватое опасностями кораблекрушений. Действительно, только те, кто исследовал наследие античной геометрии, знают, сколько усердия и внимания в нее вложено. Не допускалось никаких неясностей и умолчаний, обязательно обосновывалась каждая малость. Одним словом, в своих книгах они стремились создать столько систем геометрических истин, сколько необходимо, и которые можно было бы смело противопоставить традициям скептиков. Поэтому они не заслуживают критики, а скорее, достойны всяческой похвалы, потому что всеми средствами старались сохранить достоверность (точность) геометрии. Конечно, если бы все ученые следующих времен захотели проявить усердие в доказательствах трудов своих предшественников, эти труды, порой небольшие по объему, разрослись бы в огромные тома, но хорошо, что сейчас мы ограждены от нападок людей, называемых в древности скептиками. Действительно, Петрус Белиус (Пьер Бейль)[v], гений проницательности, по-видимому, в жизни не имел никакого желания ставить под сомнение геометрическую достоверность, но из благоразумия не осмелился доверить свои доводы публике, поскольку был лишен каких-либо знаний в геометрии, и только тайно, в письмах своим друзьям, рассылал свои критические замечания по геометрии, и по примеру Жака Бернарда[vi], который был профессором математики в Лейденском университете[vii], утверждал, что убежден в достоверности геометрии.

Но оставив их, я продолжу повествование о развитии геометрии. Долгий период до Франсуа Виета в геометрии ничего не происходило, кроме попыток псевдоциклометрии[2] и тому подобных вещей, похороненных в забвении, которого они вполне заслуживали. Но вот Франсуа Виета приумножил знания, и поэтому его называли первооткрывателем и основателем *Анализа специоза*; именно основателем, а не реставратором; как вижу, это думают многие сомневающиеся, полагающие, что некий Анализ специоза уже был известен и использовался древними, но старательно скрывался, и они утверждают, что был создан другой, вдохновленный небом. Ибо сам он опубликовал различные работы превосходного качества: а именно: *Введение в аналитическое искусство*[viii]; *Первые замечания к видовой логистике*[3]; *Книга 5 Зететики*[ix]; *Трактат об анализе и усовершенствовании уравнений*[x]; *Возведение чисел в степени и истолкование решений*[xi] (1600 г.): все они относятся к *Анализу специоза*. Виета также опубликовал множество других, частично геометрических, частично смешанных работ, все они, конечно, указывают на его великий гений. Следует признать, что, с другой стороны, *Анализ* Виета более запутан и труден, и он менее востребован, чем тот, который позже развил славный Декарт и о котором подробнее будет сказано дальше.

В 1621 году от Рождества Христова Иоанн Непер, знатный шотландец, опубликовал в своей книге *Открытие Логарифмов*[xii], и снискал благодарность математиков за то, что свел тригонометрические вычисления к дивной простоте. Ничего более полезного и превосходного невозможно найти в геометрической и астрономической науке. Но логарифмы – это искусственные числа, они заменяют натуральные числа, над которыми нам приходилось выполнять ранее неизбежные операции умножения, деления, извлечения квадратного и кубического корней; теперь же вместо этого мы выполняем над логарифмами простые операции сложения, вычитания, деления пополам, трисекции и т.д.; таким образом, за четверть часа можно подготовить больше тригонометрических примеров с логарифмами, чем за многие часы без логарифмов. В самом деле, даже если кажется, что это открытие относится скорее к арифметике, чем к геометрии,

[1] Заметим, что привычная нам декартова система координат еще не сформировалась к 1727 г. Площадь между гиперболой и ее асимптотой рассматривалась вне координатной системы. Герман имеет в виду известную нам формулу площади под гиперболой, выражаемую через логарифм.

[2] Циклометрия – группа геометрических задач о разделении круга с помощью циркуля и линейки.

[3] Логистика – совокупность арифметических вычислений.

тем не менее геометрия может с полным правом утверждать, что учение о логарифмах принадлежит в равной степени как геометрии, как и арифметике; ибо все их соотношения очень легко выводятся из этой изогнутой линии, которую поэтому называют также логарифмической. Более того, мне не стыдно высказать парадокс, благодаря которому геометрия действительно может с величайшим правом претендовать на логарифмы. Конечно, учение о логарифмах не менее важно для совершенствования высшей математики, особенно *Интегрального исчисления*, чем для быстрого и удобного освоения практической геометрии и арифметической астрономии, о чем я не премину побеседовать с большинством коллег в Академии.

Что касается изобретателя логарифмов, то восхваленный ранее Непер заслуженно оценен. Хотя Иоганн Кеплер, восхваляя Йоста Бюрги[xiii] как первооткрывателя, не колеблясь, утверждает в *Рудольфовых таблицах*[xiv], что Бюрги пришел к этому открытию раньше Непера, Кеплер предпочитал настолько часто обращаться лично к Бюрги[xv], что из-за задержки своей публикации упрекал Бюрги в медлительности; тем не менее, ничто не может умалить право открытия Непера, ибо он первым опубликовал свое открытие, несомненно, не догадываясь о том, что нечто подобное уже было открыто кем-то другим.

После Непера на сцене появляется Бонавентура Кавальери, который в 1635 г. опубликовал *Geometria Indivisibilium*[xvi] (Геометрию неделимых), чем немало способствовал совершенствованию геометрии. Его усилия были направлены на то, чтобы, сводя непрерывные количества к их началам или элементам, можно было бы доказать равенство элементов одной фигуры другой вплоть до числового равенства, а путем объединения элементов в одну сумму найти величины этих фигур. Ибо мысленно он делил линии на точки, поверхности на линии и тела на поверхности; поэтому он считал равными две линии, или две поверхности, или даже два тела, в каждом из которых содержалось бы или равное число точек, или равное число линий, или даже равное число поверхностей, таким образом содержащихся в обоих. Его разделению непрерывных величин нашлось немало противников, поскольку он таким образом ввел так называемые неделимые вопреки правилам геометрии, и настолько, что осмелился ввести Математику (Mathesin) в споры о строении континуума, но еще более полно и ясно, чем в *Геометрии неделимых*, его замысел раскрылся в *Геометрических этюдах*[xvii] (*Exercitationes geometricae sex*), опубликованных в 1647 г., ибо там он показывает, что для того, чтобы показать равенство двух фигур, никогда не бывает достаточно установить равенство элементов в каждой фигуре, но всегда нужно добавлять равные поперечные сечения этих элементов линиями; это объединение элементов фигур и было безупречным методом[4], который всегда давал истинные числовые значения, соответствующие существу дела. В третьем упражнении он подробно отвечает на все возражения Паулюса Гульдина, который был его величайшим противником[xviii]. Действительно, во всех предыдущих пяти упражнениях он достаточно обстоятельно объясняет характер, природу и достоверность своего метода. Я нахожу, однако, что Эванжелисто Торричелли развил этот метод гораздо успешнее, чем сам Кавальери, и что он использовал его для открытия многих вещей, даже вводя неделимые, о которых у Кавальери не упоминалось, как это можно увидеть в трактате Торричелли *De solido hyperbolico acuto*[xix], написания которого ему пришлось работать с неделимыми.

Но если сказать то, что я думаю об этом методе, я должен признать, что он внес замечательное дополнение к геометрии предшественников, поскольку многие вещи, которые раньше казались непостижимыми, были легко решены этим методом неделимых. Хотелось бы сравнить новейшие методы бесконечно малых, какова разница между ними, или, скорее, чем отличается инфинитезимальный метод, исчисление, называемое сложным дифференцированием[5], от оставленного позади метода Кавальери, или и так ясно, что велик тот человек, который уже однажды был признан достойным своего труда, где с помощью этого метода представлена квадратура некоей малой сложной фигуры таким методом, что даже любой новичок мог бы очень легко вывести ее, нежели любым другим методом интегрального исчисления. Настолько, что в то время никто, квадрируя какую-либо фигуру, элемент которой содержал в себе простые степени абсцисс, не мог выдвинуть в пример великих людей, продвинувшихся в этих вопросах. Тогда метод неделимых непригоден для общих решений и теорий, а для каждой частной задачи требуются и частные исследования; короче говоря, этот метод недостаточно прост для *Этюдов* Кавальери по использованию степеней неделимых, но это не доказывает, что его метод легко применим

[4] Здесь можно не согласиться с Германом.

[5] differentialem complexae.

к исчислению; ибо в этом упражнении он лишь пытался показать, как квадратуру парабол более высоких степеней можно получить с помощью неделимых.

Метод неделимых далее развил и усовершенствовал Грегори (Григорий) из Сент-Винсента, который в 1647 году опубликовал большой фолиант, состоящий из двух томов: *Геометрическая работа о квадратуре круга и конических сечениях, в 10 книгах (Opus Geometricum Quadraturae circuli et sectionum Conicarum X libris comprehensum)*. Хотя эта замечательная работа была у меня когда-то в моих путешествиях, потом я обнаружил, что все демонстрации этого автора проводились с удивительной легкостью, простотой и ясностью, какой я никогда не смог бы достичь, да и того уже нет под рукой, поэтому я не смогу рассказать вам содержание самой работы. Кажется, в первой книге он занимается пропорциями различных линий, свойствами треугольников и пропорциями прямоугольников. Во второй он рассматривает бесконечные прогрессии и выводит сумму бесконечных прогрессий, и все это учение применяет к плоскостям и твердым телам, в третьей сравнивает углы и круговые дуги, рассматривает пересечение окружностей, величины линий в круге[6] и другие вводные понятия (пролегомены) к разделам Коник, книги IV, V и VI о трех конических сечениях. Книга VII – о рисовании взаимного расположения плоскостей[7], где твердые тела имеют различный генезис (природу) и расположение. В VIII книге он разбирает геометрические пропорции. Книга IX: цилиндр, конус, сфера, параболический сфероид и цилиндрические копыта[8]: X книга имеет дело с собственно квадратурой Круга, чего он добивается с помощью конических сечений. Таково, вкратце, содержание его замечательного труда, который он предпочел более высокому светилу (факелу) геометрии. Фактически, сам *Лейбниц* признает, что Труд *Григория из Сент-Винсента* вместе с работой Гюйгенса *Horologio Oscillatorio*[xx] о маятниковых часах и послания Деттонвилля[xxi] о циклоиде осветили ему геометрию и дали много поводов и предвестий для перехода к дифференциальму исчислению.

Пожалуй, нам пора теперь сказать о знаменитом галльском философе Ренато Декарте, который в 1637 г. впервые опубликовал свою *Геометрию*[xxii] на французском языке; эта работа была позже переведена на латынь Франциском Схоутеном и вышла в Амстердаме в 1649 г., дополненная примечаниями Флоримона де Бона[xxiii], служителя королевского суда Блуа, который в самом обширном комментарии восхваляет Франциска Схоутена[xxiv], профессора университета в Лейдене (Lugdunum Batavorum). Работа [Декарта] действительно невелика по объему, но весьма полна новыми открытиями; ибо в ней *Analysis speciosa* не только изложен с замечательной легкостью, но и чрезвычайно успешно применен к геометрии, что с такой ясностью и успехом никем до него не выполнялось. Эта *Геометрия* разделена на три книги, первая из которых посвящена задачам, которые можно решить построением только прямых линий и окружностей. Прежде всего он показывает, как можно геометрически выполнить умножение[xxv], деление и извлечение корней, а также каким образом и с какими преимуществами можно использовать это в геометрии. Показывает также, как прийти к уравнениям, которые могут быть составлены только с помощью прямых линий и окружностей, и каковы плоские задачи[xxvi], почему такие уравнения называются плоскими и какие проблемы влекут их возникновение; он приводит их построения или общие положения; и, наконец, он дает задачу, предложенную Паппом, и рассуждая о ней тем показывает начала своего анализа, на чем и завершает эту [первую] книгу.

Книга II. Он рассматривает природу кривых линий, и рассуждает, какие из них следует допустить в Геометрию, а какие из нее исключить, затем рассматривает уже начатую задачу Паппа о нахождении геометрического места точек, образованных пересечением линий, проведенных под заданными углами к четырем прямым, данным в положении, так что прямоугольник[9] из двух таких проведенных линий соответствует прямоугольнику двух других в заданном отношении[xxvii], он [Декарт] возобновляет свою работу и продолжает и упорствует в ее решении, показывая, в каких случаях может возникнуть каждое из сечений конуса при решении задачи[xxviii].

По этому случаю он скажет много замечательных слов о природе геометрических мест. Он переходит к методу проведения перпендикуляров к геометрическим кривым, то есть таких линий, которые пересекают данные кривые или их касательные

[6] linearum in Circulo potentiam.

[7] plani in planum.

[8] Цилиндрическое копыто – это меньшая часть прямого кругового усечённого цилиндра с сечением одного основания.

[9] Т.е. площадь прямоугольника, построенного на этих двух отрезках. Вычисление площади прямоугольника, по Декарту, соответствует операции умножения.

под прямым углом, что действительно не является ни самым коротким, ни самым естественным методом в деле рисования касательных или перпендикуляров к кривым; но это уже из другой главы, более превосходной, и она достойна быть причисленной к числу первых и наиболее важных открытий Анализа, приложенных к геометрии. Однако этот метод состоит в том, чтобы принять произвольное уравнение или даже другое, подходящее для рассматриваемого вопроса, а затем сравнивать отношения коэффициентов отдельных членов с уравнением, полученным в результате разработки условий задачи, или с коэффициентами этого

$$xx–2ex+ee = 0,$$

или другого, чтобы получить отсюда коэффициенты предполагаемого уравнения. Таким образом, чтобы нарисовать прямые конические сечения, секущие под прямым углом, он выводит уравнение, возникающее в результате рассмотрения прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является та линия, которая должна быть нормалью к кривой, а катеты являются ординатами кривой по отношению к оси, и вместе с частью оси между этой ординатой и перпендикуляром кривой, дают для этого треугольника квадратное уравнение, куда входят отброшенные и добавленные квадраты[10], из которого, однако, с помощью уравнения, объясняющего природу кривой, он исключает ординату кривой[11], по согласованию с которым он приходит к тому же квадратному уравнению, в котором абсцисса рассматривается как неизвестное; но остальные величины, введенные в исчисление, считаются известными; и это уравнение мы называем результирующим[xxix].

Предполагаемое уравнение представляет собой уравнение относительно квадрата квадратуры, возникающей при подсчете постоянной величины из абсциссы кривой.

Сравнивая теперь коэффициенты каждого из соответствующих членов полученного уравнения, он узнал все линии, необходимые для определения линии, пересекающей кривую под прямым углом. Применение этого метода для нахождения касательных или перпендикуляров к кривым не является, как я сказал немного раньше, ни очень коротким, ни абсолютно необходимым, но тем не менее, этот метод превосходен, его трудно улучшить, а куда более трудные методы успешно развиваются, как это будет видно в дальнейшем из нашей истории геометрии. Настолько, что сам Декарт, прекрасно зная цену найденному, с полным правом заявлял: *Я не побоюсь сказать: эта проблема не только самая полезная и общая из тех, что я знаю, но и из тех, которые мне всегда хотелось узнать в Геометрии.*

Во второй книге он переходит к оптическим линиям, конструкции которых он представляет и демонстрирует, но не раскрывая искусство их нахождения, так что величайшие [ученые] из последующих поколений, по-видимому, кое-чего достигли, открыв метод анализа и нахождения этих декартовых овалов или оптических линий. Теперь эти оптические овалы таковы по очертаниям, что при любой прозрачной форме они собирают вместе всю силу, чтобы, падая на эту прозрачную форму, лучи из воздуха сходились в одну точку, иными словами, это такой случай катоптрики, когда все лучи, преломленные от их поверхности, собираются в одну точку.

Наконец, в III Книге Декарт занимается построением телесных задач, или превосходящих телесные задачи, в которых он впервые ясно объясняет природу уравнений и различные преобразования, которые могут быть введены в них, и описывает остроумный метод, с помощью которого биквадратные уравнения могут быть сведены к кубическим. Затем, однако, он переходит к построению задач, показывающих, как корни кубических и биквадратных уравнений могут определяться пересечениями параболы и окружности, а пересечению кривых более высоких степеней соответствуют корни уравнений, превосходящих биквадратные. Во всем произведении встречаются гениальнейшие изобретения, которые дают столь же яркие свидетельства гениальности автора. Действительно, автор собрал множество вещей на нескольких листах и изложил это без какого-либо доказательства, Флоримонд де Бон и Франциск Скоутен решили помочь пониманию этого опуса во всех вещах, подлежащих объяснению и облегчить изложение автора. Схоутен, однако, не удовлетворился публикацией своего *Комментария к геометрии* Декарта, а опубликовал вдобавок следующие работы других авторов, чтобы дать лучшее понимание предмета. *Трактат* Худде[xxx] о приведении уравнений и методе максимумов и минимумов; трактат Флоримунди де Бона о природе, строении и пределах уравнений и элегантный трактат Яна де Витта[xxxi] о конических сечениях и построении локальных уравнений, а также собственный трактат [Схоутена] о порядке геометрических

[10] aequationem praebens quadraticam quadrata abscissae et applicatae inuoluentam.
[11] applicatam curvae eliminat, см. концевое примечание.

доказательств алгебраического исчисления[xxxii]. Но ни в коем случае нельзя обойти молчанием идеи Генри ван Эрета[xxxiii], который первым научился изящным и остроумным методом превращать кривые линии в прямые[12]. Я должен упомянуть, что честь ван Эрета как первооткрывателя оспаривается Дж. Валлисом[xxxiv] в пользу некоего Вильгельма Нелиуса, который опубликовал свое открытие приблизительно в июле или в августе 1657 г., но там не указано, было ли оно напечатано или действительно распространялось в письмах только в частном порядке среди друзей, что, по-видимому, является более поздним упоминанием у Валлиса; конкретно не указано, кто были те друзья, с которыми Нелий поделился своим открытием. Что касается ван Эрета, то, признаюсь по правде, только в начале 1659 года он сообщил о своих открытиях Франциску Скоутену для публикации в *Геометрии* Картезия, латинское издание которой, о котором я упоминал, тогда готовилось; но можно ли отсюда заключить, что он пришел к этому открытию не раньше, чем сообщил о нем Схоутену посредством писем, посланных в *Сомюр* (Salmurio)[xxxv], описывающих его метод спрямления кривых (преобразования их в прямые линии), который он обдумывал в то время, когда планировал путешествие в Галлию. Действительно, он сообщил, что некоторое время находился в Салмурии в Галлии, а возможно, и где-нибудь еще; и поэтому можно легко предположить, что между изобретением и публикацией прошло год или два, и в этом случае предшественником был Неллиус. Более того, ван Эрет имеет приоритет перед Нелием, потому что он знал и назвал ту кривую, которой он сопоставляет равную прямую, а именно, кубическую параболу, порядок, в котором следует рассекать способом с коэффициентом самоумножения[13], фактически он задал разложение бесконечных прогрессий, все из которых абсолютно спрямляемы. Поэтому я без колебаний отдаю должное ван Эрету за первенство в этом открытии. Это открытие, о котором следует упомянуть, было достойным остального: не только все предшественники, но и сам Картезий того мнения, как будто природа прямого и кривого настолько различна, что отношение одного к другому никоим образом не может быть познано или понято людьми. Картезий говорит об этом истинном смысле в Книге II Геометрии: отношение, существующее между прямыми линиями и кривыми, неизвестно и не может быть известно даже людям (так думает он сам). Ван Эрет, Нелий и другие с похвалой поддержали это провозглашенное мнение.

Но я возвращаюсь к Картезию; ибо после того, как философ научил нас строить телесные задачи посредством пересечения круга и параболы, а после того, как Схоутен – посредством круга и гиперболы, были еще предприняты попытки создания различных новых конструкций такого рода. Однако, похоже, никто не развил этот аргумент с большим успехом и мастерством, чем Ренато Франсиско Слузиус[xxxvi], выдающийся каноник Леодиенса[14] и выдающийся геометр; ибо здесь, в книге, которой он дал название *Мезолабум*[xxxvii] потому, что он взялся построить делийскую задачу о двух пропорциональных средних с помощью конических сечений бесконечным числом различных способов, и подтвердил достоверность ее построения посредством геометрических доказательств; удивительно, насколько он усиливает картезианский метод; особенно после добавления Анализа, благодаря которому он получает те конструкции, о которых сообщает в *Mesolabum*. Ибо в этом Анализе он ясно показал, как путем бесконечных комбинаций сечений конуса и круга кубические и биквадратные уравнения строятся без всяких предварительных усилий, направленных на удаление второго члена уравнений. И, наконец, он показывает, как посредством пересечений окружности и параболы строятся кубические и биквадратные уравнения, в которых отсутствует второй член, и таким образом, задолго до Томаса Бейкера[xxxviii] он нашел не менее важное правило, которое называют Центральным[15], нежели названное правилом Иоганна Христофа Штурмиуса[xxxix], который привел подробнейшее изложение в своей *Математике* (*Mathesis*) и считал, что оно основано на некотором редком свойстве параболы: что правая часть представляет собой сумму двух полуординат, так что разность такая же, как разность биссектрис, которую заменил Томас Бейкер в «Ключе католической геометрии», что, по мнению Штурмиуса, было неизвестно древним и чего не заметил Декарт. Более того, Бэйкер не был первооткрывателем этого свойства, но он извлек его из некой рукописи «Конических сечений» Томаса Стройда[xl], как это следует из *refert Mathes. Enucleat. pag.* 253. Но Штурмиус дивился тому простому факту, заключающемся в знаменитом свойстве параболы, которое проистекает от

[12] Речь идет о спрямлении кривых, т.е. о нахождении отрезка прямой, равного по длине отрезку кривой.
[13] умножая саму на себя, cuius ordinatae essent in ses quiplicata ratione abscissarum.
[14] Льеж, Валлония, Бельгия.
[15] Centralem.

главного известного сечения параболы, то есть квадрат каждой полуординаты к оси представляет собой прямоугольник под правой стороной и абсциссой, что неизбежно, ибо если мы посмотрим на две разные полуординаты параболы, то разница квадратов одной и той же будет равна разнице между прямоугольником под правой стороной и большей абсциссой и прямоугольником под той же правой стороной и меньшей абсциссой, это равно прямоугольнику под правой стороной и разности абсцисс: но кто не знает, что разность двух квадратов равна прямоугольнику из суммы сторон на разность их же, т.е. этому равна разность прямоугольника под правой стороной и разность абсцисс, равенство меняется на противоположное пропорционально, так что правая часть равна сумме полуординат параболы, и, таким образом, разница одного и того же равна разнице абсцисс. Тогда Штурмиус, слишком доверяя Бейкеру, полагал, что это свойство было неизвестно древним, но оно фактически встречается уже в *Математическом собрании* Паппа Александрийского и, без сомнения, у других авторов, писавших о Кониках. Наконец, Слузиус выводит свое построение на основе предложенного уравнения, пренебрегая упомянутым свойством. Сначала, сравнивая уравнение параболы с неким вторичным диаметром, связанным с ней, и создавая уравнение, он, наконец, выводит уравнение окружности, из которого находит второе положение центра, определяя столь знаменитое центральное правило Бейкера (так восхваляемое Штурмиусом, но не доказанное) и так и не нашедшее применения. Действительно, кажется, что *Слузиус* в первую очередь заботится о произвольности построения параболы, учитывая, что он всегда использует такое уравнение параболы, в котором квадрат полуординаты, подлежащей построению через половину коэффициента второго члена уравнения, равен прямоугольнику из параметра до оси абсцисс, это ни в коем случае не указывает на произвол, а ограничивается построением уравнения, которое имеет в подобных построениях важнейшее значение. Выдающийся геометр Филипп де ла Гир[xli] опубликовал книгу о построении уравнений через пересечения двух мест, в которой он хотел превзойти Слузиуса в том, что первое место построения он обычно принимал произвольно, но он показал, что достопочтенный Ролль, член той же Академии, насколько зыбок и неопределенен в методах, при такой универсальной трактовке, что первое место построения выбирается произвольно. Ибо он доказал на примерах, что часто бывает так, что построение дает иные корни, чем те, которые должны быть получены в составляемом уравнении.

В то время как Декарт и картезианцы систематизировали и обсуждали проблемы, Блезиус Паскаль и другие в Галлии обратили свои умы к квадратурам криволинейных площадей, и самым важным объектом их размышлений стала циклоида, Паскаль предложил всем математикам Европы различные задачи о циклоиде; некоторые касались квадратуры частей циклоиды, иные – центров тяжести не только циклоидальных кривых, но и различных образованных ими тел, не только полученных вращением вокруг оси, но и вращением вокруг верхней касательной и вокруг основания циклоиды; а также центры тяжести этих твердых тел; все это в то время было предметом глубокого и трудного исследования, поэтому некий Аноним[xlii] предложил награду в 60 золотых, из которых первому решившему было бы выдано сорок, а второму двадцать; а если один решит все, то получит все шестьдесят золотых. Я так и не выяснил, с какими трудностями они столкнулись; единственное, что мне известно, так это то, что знаменитый Валлис сообщил, что он не только дал решения всех задач, но и отправил их в Париж, не получив, однако, премию. Действительно ли с его стороны были недостатки в предписанных формальностях, или же он прислал решения слишком поздно, а другие решения Валлиса были отправлены светлейшему Каркави[xliii], но это не суть важно. Что касается решений, которые дал Валлис, то они отчасти были получены с помощью метода неделимых и отчасти с помощью арифметики бесконечного. Но все, что предлагает Валлис, можно гораздо легче и короче получить с помощью бесконечно малых, более того, даже из простого геометрического рассмотрения легче вывести бесконечно малые. Однако, я не утверждаю этого окончательно, словно желая принизить выводы Валлиса и обесценить его решения, я лишь хочу подчеркнуть превосходство современных методов над методами наших предшественников. В остальном, однако, Валлис, безусловно, достоин большой похвалы потому, что, хотя он никогда не размышлял о природе циклоиды до того, как были предложены эти задачи, и поэтому подошел к этим задачам о циклоиде как гость (новичок), тем не менее он нашел подлинные решения в течение короткого периода времени.

Но каковы же решения, которые Деттонвиль или Паскаль, предпочитавший скрываться под этим именем, опубликовал в своей истории циклоид[xliv], написанной по-французски, в которой он рассматривает гораздо больше проблем, чем упомянуто нами. Поскольку его книги нет у меня под рукой, я ничего не могу сказать, хотя когда-то читал ее. Насколько я помню, он не исходит из алгебраических вычислений, но он все выводит из природы и характера различных математических прогрессий. Но сам Валлис, предоставив свои открытия, утверждает, что он нашел все доказательства. Также ничего нельзя сказать о решениях, которые Антониус Лалуэра[xlv] опубликовал те же задачи Паскаля в 8 книгах и с двумя дополнительными приложениями, которые он в 1660 г. отправил в суд (licem) Тулузы; мне никогда не доводилось видеть эту работу, могу лишь добавить, что Валлис, обсуждая свои решения с Лалуэрой, в большинстве случаев пришел с ним к полному согласию, за очень небольшими исключениями.

Поскольку выше мы упомянули *Арифметику бесконечного* Валлиса, справедливо будет кратко указать на ее содержание и метод. Вся эта арифметика опирается на индукцию. Сначала он исследует характер прогрессии, в которой следуют элементы четырехугольной или кубовидной фигуры[16] от наименьшего к наибольшему, выраженному в числах, затем он исследует отношение определенного числа членов к последнему члену, взятому столько же раз, сколько имеется последовательных членов, и поскольку это соотношение вообще варьируется в таких рядах, с помощью которых формируется ряд, далее он исследовал, приближается ли найденный им результат к итогу так, что при бесконечном количестве существующих членов, отличие результирующего итога от этого определенного результата должно быть меньше любого заданного числа и так далее, чтобы вышеупомянутое заданное число исчезло. Иногда он также применяет метод интерполяции, который использует, чтобы из двух рядов, один из которых ему известен, и каково отношение бесконечного числа членов одного ряда к такому же числу членов другого ряда, в конечном итоге равных (между собой), он может также подвести к мысли о существовании среднего ряда с таким же числом членов. Этот метод интерполяции он чаще всего применяет к рядам с иррациональными членами. Благодаря использованию таких методов ему удалось решить многие задачи, связанные с кривыми линиями, к которым приложили свои таланты многие математики того времени; он успешно нашел многие квадратуры; поскольку с помощью этого метода он дал решения задач Паскаля в *Трактате о циклоиде* и в *Трактате о циссоиде* по спрямлению кривых и вычислению площадей, которые в то время были наиболее трудными; несмотря на их сложность, их вполне можно было решить; главное то, что в Пятой главе о Механике, где речь идет о вычислении центра тяжести, он привел наиболее известные задачи своего времени, решенные тем же методом. На этом основании можно сделать вывод о превосходстве этого метода и его широкой общности. Однако прискорбно, что этот метод лишь условно геометрический, приближенный, против него возражали Ферма и другие. По этой причине Исмаэль Буллиалдис[xlvi] взялся проиллюстрировать и подтвердить эту *Арифметику Бесконечного* с помощью геометрических демонстраций в опубликованной работе, напечатанной в Париже *in folio*; он начертал *Арифметику Бесконечного*, в которой он продолжил свои доказательства вплоть до рядов четвертой степени, однако во всех них он, по-видимому, исходил только из частных случаев, поскольку в его время еще не были найдены общие методы суммирования конечных рядов. Однако совсем недавно Як. Бернулли, Раймонд де Монмор и Брук Тейлор, а из нашей Императорской Академии Христ. Гольдбах и Фридр. Хр. Майер открыли методы, с помощью которых можно суммировать любой ряд фигурных чисел; а в текущих записях я также нахожу разные произведения, написанные здесь несколько лет назад.

Что до меня, то на мой взгляд геометрический метод суммирования всех видов величин, изменяющихся по определенному закону, должен высоко цениться, когда из простого созерцания открывается вид искомых сумм, ибо это имеет особую элегантность, с чем мы почти не встречаемся при арифметическом рассмотрении этих вопросов. Многие примеры этого геометрического метода встречаются как в работах Кавальери, Стефани де Анжелиса и Гвидона Гранди, так и в обширном труде Григория Сен Винсента о конических сечениях, и особенно в *Уроках геометрии* (Lectionibus Geometricis) Исаака Барроу, где есть много зачатков высшей геометрии.

До сих пор мы занимались историей средневековой геометрии, о которой я скажу, что она непосредственно возвышается над геометрией Конических сечений и Архимеда; и все же она не достигла преимуществ высочайшей геометрии последнего времени. Но геометрия, передающая лишь элементы знания, принадлежит лишь к младенческому периоду геометрии.

Теперь полагается, чтобы я осветил историю геометрии не только взрослого, но и старшего

[16] figurae quadrandae aut cubandae – квадратной или кубической.

возраста, то есть самой возвышенной геометрии. Мы уже указывали выше, что методы Валлиса способствовали длительному прогрессу в раскрытии тайн геометрии; а Барроу нашел более простой способ проникнуть во внутреннюю часть геометрии; ведь Барроу, помимо того, что изложил в своих лекциях множество прекрасных геометрических теорем, которые породили новые и открыли доступ к недрам науки, он также дал в исчислении метод, с помощью которого удивительно упростилось вычисление касательных, и во многих случаях очень легко определялось наибольшее и наименьшее значение; исчисление Ферма, сенатора[17] Тулузского, не достигало той простоты, которая позже была достигнута Барроу. Но не только последователи Валлиса, но и последователи Барроу привнесли замечательный подход к геометрии; однако они еще не приблизились к той легкости, простоте и универсальности, к которым этот вопрос был выведен и завершен новейшими методами прямого и обратного дифференциального исчисления. Сиятельный Лейбниц исследовал и нашел общий метод такого рода, который он описал в журнале *Acta eruditorum* 1684 г., октябрь, стр. 467. Он был первым, кто обратился к публике с таким заголовком: *Новый метод для наибольшего и наименьшего, а также для касательных, который не опирается ни на ломаные, ни на иррациональные величины, а на особый вид расчета для них*.

В этом случае на нескольких примерах показано использование традиционного алгоритма дифференциального исчисления: сначал найти наименьшую и наибольшую ординату кривой, а также исследовать, является ли данная кривая вогнутой или выпуклой по отношению к оси; далее определить точки перегиба в другую сторону, чтобы понять, с какой стороны будет касательная, причем для большей наглядности метода он выбирает весьма сложный пример; он переходит к примеру метода наибольшего и наименьшего, который он взял из Диоптрики, исследуя положение падающих и преломленных лучей, когда эти лучи проходят через среды различной плотности, исходя из гипотезы, что это прохождение через обе среды должно быть кратчайшим. Далее он перешел к новому примеру касательной, ведущей к кривой такого характера: любая точка этой кривой обладает тем свойством, что сумма шести отрезков, проведенных из нее до шести точек оси, равна данному отрезку подобно тому, как в эллипсе два отрезка, проведенные из любой его точки к фокусам, равны поперечной оси. И, наконец, он приводит решение задачи, которую Декарт безуспешно предложил Бону (Florimond de Beaune) в Послании в т. III: *найти такую кривую, подкасательная которой всюду одинакова*; найденная им кривая должна быть *логарифмической*.

Кажется, что эта схема Лейбница поначалу не произвела большого впечатления на умы геометров, она в течение нескольких лет пролежала невостребованной и, казалось, не принесла никаких плодов: либо из-за неясности предмета, поскольку выдающийся автор очень сжато написал первые элементы своего дифференциального исчисления, используя буквенные обозначения, либо это произошло по какой-то другой причине. Это видно из нескольких номеров журнала *Acta Eruditorum* после 84-го года, в которых нет ничего, посвященного этому исчислению, за исключением нескольких работ, опубликованных самим Лейбницем. Действительно, в 1685 году Штурм[xlvii], придерживаясь *Arithmeticae infinitorum* Валлиса, предпринял трудную и запутанную попытку вычисления квадратуры параболы, которая, однако, как и квадратура некоторых других кривых, без труда получается с помощью интегрального исчисления. Тем временем в 1687 г. вышел самый известный труд Исаака Ньютона, озаглавленный *Математические начала натуральной философии*, в котором он в основном занимается вещами, которые касаются силы тяжести, легкости (levitatem), силы упругости, сопротивления жидкостей и других подобных явлений силы или притяжения, обо всем этом он рассказывает в первых двух книгах, а в третьей книге излагает свою систему мира на основании двух предыдущих, исследуя на основе небесных явлений силы гравитации, с помощью которых тела стремятся к Солнцу и отдельным планетам, затем из этих сил он выводит движения планет, комет, Луны и Марса. Во всей работе он использует не аналитическое исчисление Лейбница, а учение о первых и последних отношениях. Первые отношения – это отношения постоянных величин, получающихся непрерывно одна из другой, а последние отношения – это отношения исчезающих величин[xlviii]. Однако существуют количества, возникающие из ничего путем незаметного увеличения. Ибо если при первом шаге ничего не изменилось, то последовательно появятся новые и новые, и в результате возникнут величины, создающие какое-то развитие, каким бы оно ни было. Первая из этих развивающихся величин и наименьший предел – это *зарождающаяся величина*. Точно так же, если другая величина

[17] Petrus de Fermat, Senator Tholosanus – Пьер Ферма с 1631 года был советником парламента в Тулузе (commissaire aux requêtes au sein du parlement de Toulouse).

постоянно уменьшается, то последняя величина, с которой она исчезает (сходит на нет), и которая является наименьшей, является *исчезающей величиной*. Он вывел все из этой доктрины отношений и предельных значений и время от времени также обращался к бесконечным рядам, но никогда не использовал их в своем *Методе флюксий*[xlix], которое он опубликовал намного позже, а именно в 1704 г. в *Трактате о квадратуре кривых*[l]; он использовал это в *Началах философии*; где-то упомянул об этом и, наконец, признал, что за десять лет до того, как получил письмо от Лейбница, он уже сообщил ему свой метод проведения касательных и еще один подобный метод, верный как для отрицательных, так и для рациональных чисел, он признавал, что метод Лейбница почти не отличается от его собственного, за исключением словесных формулировок и обозначений в формулах. См. Схолия, следствие, лемма II. Книга 2. *Математические начала натуральной философии*.

Новый метод дифференциального исчисления в стиле Лейбница, или ньютоновский метод флюксий, прекрасен, как жизнь, поскольку он приводит к недоступным для предыдущих методов истинам, и даже когда истинность следует из других соображений, он дает новые подтверждения. Однако у него не было недостатка в противниках и критиках, и даже по сию пору у него нет в них недостатка, хотя их теперь меньше, чем раньше. Ибо этот метод, как и искусство фокусников, показался противникам скорее чудесным, чем надёжным, на который можно уверенно положиться и пользоваться. Ибо то, что доставило им много хлопот и во что труднее всего поверить, состоит в том, что в этом вычислении равными следует считать даже те количества, между которыми имеет место реальная разница, хотя бы и бесконечно малая; но ведь по общепринятым понятиям равными считаются только те, между которыми нет различия. Получается, что все отдавали предпочтение перед новыми методами таким методам, которые наиболее близки к истинным, хоть и не совсем верны. Теперь, когда бесконечно малая разность двух величин, подобных тем, которые считаются равными в дифференциальном исчислении, реальна, утверждают, что сама эта разность обычно подразделяется на свои элементы, и что если бы таковых не было, то они не могли бы быть разделены, так как нет никаких делений ни на что. Признаюсь, я однажды ответил на возражения Его светлости Бернхарди Ньювентийта[li], который с позиции обычного человека выступал против различных новых методов, и в 1700 г. попытался конкретно защитить ту трудность, о которой я только что говорил, а именно, что хоть разность между равными действительно бесконечно мала, но все же она – реальная вещь; я хотел заступиться за этот тезис, но между тем я изменил свое мнение и увидел, что это допущение такого рода вообще не нужно в дифференциальном исчислении. Что же тогда, говорят оппоненты, представляют собой первые различия, строго так называемые ничто, или небытия? Если это так, то что же сказать о втором, третьем и высших различиях? А сами они суть ничто или несуществующие; что тогда? Нет, ответит критик, различия между *первым, вторым, третьим* и т. д. одинаковы; но я бы опроверг, что они одинаковы; если все это ничто, а равенство есть проявление действительных величин? Более того, позвольте мне сказать далее, что использования вторых, третьих и высших разностей в практике исчисления можно избежать настолько, что все можно свести только к первым разностям; тогда они, несомненно, преодолеют все возражения, касающиеся второстепенных и высших различий: ибо надо помнить, что эти различия не следует рассматривать сами по себе, а лишь в сравнении с другими различиями: с другой стороны, ясно, что отношение двух обнуляемых величин в случае исчезающе малой ничтожности может быть самым реальным. Это ясно видно на тех дробях, у которых числитель и знаменатель в некоторых случаях, когда неопределенное становится равным определенному, обращаются в нуль, но в этом случае значение самой дроби не равно нулю, а может быть весьма реальным. Поэтому в новом дифференциальном методе наиболее важно иметь правильное представление о нем (о его реальности) и о принципах, на которых он построен, ибо все остальное можно вывести из него столь же геометрически, как и любое положение из Коники Аполлония или из Архимеда.

Нет смысла больше задерживаться на опровержении тех, кто пытался низвергнуть новый метод, нужно исследовать, какие новые дополнения были сделаны и кем они были освоены. Первыми были знаменитые братья Бернулли, Якоб и Иоганн, которые, догадываясь, что за формализмом Лейбница кроется нечто великое, с большим напряжением старались понять его содержание и постичь его смысл. Ибо некоторые страницы Лейбница изложены невнятно, новые понятия объясняются слишком кратко, элементарные понятия имеют неясные обозначения и прочее. Но стремление Бернулли проникнуть в тайну изобретателя успешно преодолело все трудности, которые могли оттолкнуть других, настолько, что они [братья Бернулли] не только постигли смысл лейбницевского формализма, но и привели само исчисление и его приложения к большему совершенству, чем сам изобретатель Лейбниц. Ибо путем пристального изучения они выяснили, как с помощью этого исчисления проводить касательные к кривым, исследовать, является ли какая-либо кривая вогнутой или выпуклой по отношению к оси, находить точку перегиба или точку возврата, находить лучи (радиусы) эволюты, точки относительно отражения катакаустикой и диакаустикой[18] и еще шестьсот других, которых нет в схемах Лейбница. Якоб Бернулли в журнале *Acta eruditorum* в 1690 г. исследовал два прекрасных примера; в одном из них он рассматривает измерения геликоидной параболы (Parabolae Helicoidis) и изгиб кривых в целом, а также подробно рассматривает эволюцию той и других, а в другом примере в том же году он учит использовать дифференциальное исчисление в измерении логарифмической спирали, в навигационных локсодромах и при вычислении площадей сферических треугольников, не зная тогда, что эти площади можно довольно легко найти без дифференциального исчисления. Он добавил в этот пример некоторые вещи, относящиеся к частной задаче. Ибо в *Журнале ученых* 1690 г., с. 218 он опубликовал схему, в которой представил решение проблемы Лейбница о нахождении линии спуска тяжелого тела, проходящего равные высоты в одинаковое время, и он был первым, опубликовавшим пример из интегрального исчисления, о котором абсолютно ничего нет у Лейбница, включив отрицательную[19] величину из дифференциального уравнения искомой кривой, выведя интегральное уравнение, выраженное в конечных количествах, и он понял, что искомая кривая представляет собой вторую кубическую параболу[20]; для этого случая он предложил следующую задачу: найти форму веревки, совершенно гибкой во всех своих частях, но неспособной к растяжению, свободно подвешенной между двумя неподвижными точками. Решение этой проблемы позднее представили его известный брат Иоганн, Лейбниц и Гюйгенс. Но он сам, Якоб Бернулли, в своем Дополнении ко второму примеру дифференциального исчисления добавил следующие решения, к тем, что дали знаменитые из прославленных, чтобы определить форму веревки, даже если веревка не везде одинаково толста, но ее вес в разных частях различен, с некоторыми вариациями (вариантами). Затем он определил форму равномерно толстой и совершенно гибкой веревки, когда веревка растягивается под действием собственного веса, предполагая при этом, что удлинение веревки пропорционально растягивающим силам. По этому поводу он пишет об упругой фигуре, уравнение которой определенным образом зашифровывает. Наконец, он упоминает *форму развеваемой ветром вуали*, наблюдение за которой он объявляет гораздо более возвышенным, чем все предыдущие. В то же время его знаменитый брат, проживая в Париже[lii], написал *Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению*, в которых не только наглядно изложил алгоритм дифференциального исчисления, но и его использование для проведения касательных, определения точки перегиба, для определения радиуса закругления кривых, для нахождения максимума и минимума, благодаря чему вопрос о нахождении минимума проясняется, и он учит многим другим вещам, которые можно найти, поэтому он также показал интегралы нескольких составных дифференциалов или суммы вместе с методом их вычисления, вычисление с помощью интегралов квадратуры пространств (т.е. объемов), обратный метод касательных и показывает многие другие решения такого же рода, а также, помимо самых известных задач, цепные линии, вуали, паруса; он достигает и других результатов, решения которых он получает путем расчета. Все это пишу по памяти о *Рукописи Бернулли*; хотя когда-то у меня был его апограф (собственноручная рукопись), но по возвращении из Италии я по какой-то случайности потерял его. Из того, что мы сообщили до сих пор, ясно, что та высокая эффективность, которой постепенно достигло дифференциальное исчисление, должна быть отнесена по большей части к Бернулли, поскольку он в задачах, на решение которых едва ли можно было надеяться другими методами, дал чудесные результаты в удивительном количестве; иначе этим исчислением долго пренебрегали бы и мало пользовались. Конечно, Иоганн Христофор Штурм, которого не только в Германии звали первым геометром и математиком, в своем сочинении *Mathesi sua enucleata*[liii], опубликованном в 1689 г., спустя четыре года после работы Лейбница, не упоминает никакого дифференциального исчисления. В этом труде собраны сведения из элементарной геометрии разных авторов, из записей Схоутена и других и, наконец, из *Арифметики бесконечного* Валлиса и некоторых других, он дал большой обзор геометрических тем,

[18] Каустика – огибающая семейства лучей, отраженных или преломленных данной линией. Каустика отраженных лучей называется катакаустнкой, каустика преломленных лучей называется диакаустикой.

[19] Глухую, surdam.

[20] Parabolam cubicam secundam.

которые относятся к элементарной геометрии, коническим сечениям и другим кривым, которые он нашел в сочинениях разных авторов, а также построение плоских и телесных задач. И к нашему удивлению, даже во втором издании[liv] этой книги 1695 г. не упоминается дифференциальное исчисление; хотя *Mathesis Enucleata* представляетт собой самую важную, самую полезную и практически самую простую книгу из всех имеющихся по геометрии, при правильном понимании которой было бы ничуть не труднее объяснить и дифференциальное исчисление, которое должно было бы быть раскрыто и проиллюстрировано в первую очередь. Однако беспомощность его попытки обнаружилась в 1696 г., когда появилось сочинение *Анализ бесконечно малых* славного маркиза Лопиталя, очень изящный труд, который, помимо ясно объясненных правил дифференциального исчисления, содержит все основные понятия, а именно касательные, максимумы и минимумы, перегибы направления кривизны, радиусы кривизны, оптические линии, или каустики при отражении и преломлении, являющиеся касательными к кривым данного положения, а значения их в определенных случаях представляют собой дроби с исчезающе малыми числителем и знаменателем, а также многое другое. Прославленный автор имел в виду опубликовать еще одну часть того же произведения, касающуюся интегрального исчисления; но причины, о которых он упоминает, отвлекли его от этой цели. Этот недостаток пытались восполнить Карре[lv], опубликовавший книгу об интегральном исчислении, но в которой он едва бегло рассмотрел первые понятия, а затем Джордж Чейни[lvi], шотландский врач, опубликовавший *Обратный метод флюксий*[lvii] в Лондоне, 1703, где представил некоторые наиболее элегантные достижения интегрального исчисления, коснувшись всего того, что уже было открыто к тому времени. Точно так же Габриэль Манфреди[lviii], математик из Болоньи, опубликовавший в 1707 году в Болонье *in quarto* прекраснейший *Трактат о построении дифференциальных уравнений первой степени*, в котором он поделился с публикой несколькими изысканными примерами применения обратного метода касательных.

Два самых выдающихся человека научного сообщества (Republica litteraria), Лейбниц и Ньютон, мирно и спокойно владели изобретением исчисления бесконечно малых до 1705 года, и ни один из них не подвергал сомнению честь изобретения другого; скорее, они взаимно признавали открытия друг друга. Но когда Ньютон в 1704 г. опубликовал на английском языке свою *Оптику* и приложил к ней два математических трактата *Enumeratione linearum tertii ordinis* (*Перечисление линий третьего порядка*) и *Quadratura Curvarum* (*О квадратуре кривых*), обзор этих математических трактатов[lix], появившийся в январском номере *Acta Eruditorum* 1705 г., посеял семена великого раздора между этими выдающимися людьми. Ибо по случаю этого обзора, который не пришелся по вкусу большинству, некий автор[lx] отличавшийся скорее резкостью и язвительностью, нежели другими заслугами, всеми силами старался лишить Лейбница прав на его открытие; а когда Лейбниц пожаловался Лондонскому обществу на несправедливые претензии этого человека, дело дошло до того, что Общество повелело издать переписку Дж. Коллинза[lxi] и других корреспондентов, как кажется, с той целью, чтобы признать изобретение исчисления флюксий Ньютоновым, а роль Лейбница в этом открытии исключается. Ради этого к каждому из материалов были приложены примечания, искажавшие выводы Лейбница, но и на этом дело не закончилось. Ибо Ньютон однажды сообщил Лейбницу, что его метод совершенно подобен его собственному методу флюксий, а Лейбниц дал такое же свидетельство Ньютону, это было еще в те времена, когда их отношения не были омрачены гневом, и справедливому суду следовало бы сосредоточиться на этих их взаимных показаниях, нежели на тех интерпретациях, которые выдвигаются со всех сторон. И, конечно, Лейбниц заслуживал более широкого публичного признания, потому что он первым опубликовал свои открытия, и поэтому его открытия расширили возможности для развития наук.

---

[i] Фундаментальный трактат Аполлония Пергского *Конические сечения* состоял из восьми книг. Греческий текст четырех из них сохранился, еще три дошли до нас в арабском переводе, восьмую книгу реконструировал в XVIII в. Э. Галлей, издавший сочинения Аполлония (Оксфорд, 1710). В Багдаде математик и астроном Сабит ибн Курра (836–901) сделал переводы на арабский Архимеда, Аполлония, Евклида, Птолемея и других античных авторов. Трактаты Архимеда *О шаре и цилиндре, О построении круга, разделённого на семь частей, Книга о касающихся кругах*, а также V–VII книги Конических сечений Аполлония известны нам только в его переводе.

[ii] Джованни Альфонсо Борелли (Giovanni Alfonso Borelli, 1608–1679) – итальянский учёный-универсал времени Научной революции XVII века. Автор трудов по физике, медицине, астрономии, геологии, математике, механике. Основоположник биомеханики. Один из первых учёных, рассмотревших проблему динамики планетных движений и проложивших Ньютону дорогу для открытия закона всемирного тяготения. Одновременно с Вивиани переводил с арабского три книги *Конических сечений* Аполлония, что привело к спору между ними (1661) о приоритете. Перевод был завершен в 1677. https://dzen.ru/a/YfON9klugBXPSI8e

[iii] Ибрагим аль-Хакилани (Ibrahim al-Haqilani, 1605–1664), лат. Abraham Ecchellensis, был маронитским католическим философом и лингвистом, участвовавшим в переводе Библии на арабский язык. Он перевел несколько арабских произведений на латынь, наиболее важным из которых был *Восточный хроникон*, приписываемый Ибн ар-Рахибу. Вместе с Джованни Альфонсо Борелли он написал латинский перевод 5-й, 6-й и 7-й книг *Конических сечений* Аполлония (1661 г.).

[iv] Гипсикл Александрийский (Hypsicles; ок. 190 до н. э. – ок. 120 до н. э.) – древнегреческий математик и астроном. Здесь, по-видимому, имеется в виду приписывание ему 14-й книги *Начал*.

[v] Пьер Бейль (фр. Pierre Bayle, Petrus Baelius) (1647–1706) – один из влиятельнейших французских мыслителей и философско-богословский критик. Одна из центральных фигур всеевропейской «Республики ученых» Автор книги *Исторический и критический словарь* (Dictionario Historico Et Critico, 1696).

[vi] Жак Бернар (Jacques Bernard, Jacobi Bernardi, 1658–1718), французский теолог и публицист, работавший в Голландии (кафедра философии и математики Лейденского университета).

[vii] Academia Lugduno–Bataua – протестантский университет в Лейдене (Lugduno Batavorum Nederlandiae), основан 8 февраля 1575 года.

[viii] *In artem analyticem isagoge, Введение в аналитическое искусство* (1591) – трактат Ф. Виета.

[ix] Зететика – термин, который придумал придуманный Ф. Виета для обозначения науки о нахождении уравнения, связывающего заданную и искомую величины и последующее явное выражение неизвестного (или его квадрата или куба). *Zetetica* представляет собой сборник из 84 определенных и неопределенных алгебраических задач диофантова анализа. Виета хотел продемонстрировать силу своего нового метода, который он назвал «новым аналитическим искусством», «новой алгеброй» или «логистикой специоза» и который он представил в своем трактате 1591-го года *In artem Analytem Isagoge*. Текст разделен на пять книг, из которых первые три посвящены в основном определенным проблемам, а последние две – преимущественно неопределенным. Вообще говоря, книга 1 посвящена линейным задачам, книга 2 – квадратичным, а книга 3 – кубическим задачам. Неопределенные задачи четвертой и пятой книг в основном взяты из *Арифметики* Диофанта.

[x] *De aequationum recognitione et emendatione*. Состоит из двух частей, изданных посмертно в 1615 г. Recognitio, вероятно, была закончена уже в 1593 году. Трактат содержит различные методы обработки уравнений с помощью его новой логистической практики, которую Виета опубликовал в своей книге *In artem Analytem isagoge* в 1591 году.

[xi] De numerosa Potestatum ad Exegesin resolution – работа о методах извлечения корней и решений уравнений степени не выше 6.

[xii] В 1614 году Непер опубликовал в Эдинбурге сочинение под названием *Описание удивительной таблицы логарифмов* (*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*), 56 страниц текста и 90 страниц таблиц.

[xiii] Jost Bürgi, Joost, Jobst; лат. Burgius или Byrgius; 1552 – 1632. Швейцарский часовщик, изготовитель астрономических инструментов и математик. Автор логарифмических таблиц, которые разработал практически одновременно с Непером.

[xiv] Рудольфовы или Рудольфинские таблицы (1627) – таблицы движений планет, составленные Иоганном Кеплером на основании наблюдений Тихо Браге.

[xv] Бюрги с 1604 по 1630 год состоял на службе у императора Рудольфа II в Праге, где придворным астрономом был Иоганн Кеплер.

[xvi] Геометрия, развитая новым способом при помощи неделимых непрерывного (Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bologna, 1635. – 722 с.).

[xvii] Главным делом жизни Кавальери был трактат *Геометрия, развитая новым способом при помощи неделимых непрерывного* (1635) и служащие её продолжением *Шесть геометрических этюдов* (*Exercitationes geometricae sex*, 1647).

[xviii] П. Гульдин в трактате *О центре тяжести* (De centro gravitatis, Centrobaryca, 1641) критикует теорию Кавальери за неконструктивность доказательств.

[xix] Раздел *De Solido Hyperbolico acuto в Opera geometrica* (1643) Торричелли, где он вычисляет объем усеченного шпиля, образованного вращением гиперболы вокруг асимптоты.

[xx] *De horologio oscillatorio* (Маятниковые часы; 1673) – трактат Гюйгенса.

[xxi] Amos Dettonville – один из псевдонимов Блеза Паскаля. См. Mesnard J. Lettres de A. Dettonville (décembre 1658–février 1659) // Pascal Bl. Les oeuvres complètes. T. IV. Texte établi, présenté et annoté par Jean Mesnard. Paris: Desclée de Brouwer, 1992. P. 367–565. К.Ю. Кашлявик. Блез Паскаль: имя и псевдонимы // Вестник МГПУ. Серия «Филология. Теория языка. Языковое образование». https://vestnik-filologiya-lingvodidaktika.mgpu.ru/wp-content/uploads/sites/6/2021/09/364.pdf

[xxii] Геометрия Декарта была впервые опубликована в 1637 г. без упоминания имени автора, как одно из дополнений (два других это Диоптрика и Метеоры) к *Discours de la méthode* (Рассуждение о методе).

[xxiii] Флоримон де Бон (Florimond de Beaune, 1601–1652) – французский математик, друг молодости Рене Декарта. Служил при королевском суде своего родного города Блуа. Дополнения Флоримона де Бона появились только в третьем, двухтомном издании 1659 г. К новому изданию того же перевода, выпущенному им в 1659 г. в двух томах, он присоединил многочисленные дополнения, написанные частью им самим, частью другими авторами.

[xxiv] Франс ван Схотен (Francisci a Schooten, Схоутен, 1581–1646), голландский математик. Его сын, Франс ван Схотен-младший (1615–1660), унаследовал кафедру отца в Лейденском университете. Специально для Христиана Гюйгенса он написал учебник, по которому подросток-вундеркинд занимался с четырнадцати до шестнадцати лет. В 1649 г. вышел латинский перевод *La Géométrie de René Descartes* Франса ван Схотена-младшего.

[xxv] У Декарта речь идёт, в частности, о построении отрезка, длина которого равна произведению длин данных отрезков; это обычно называют победой Декарта над демоном однородности.

[xxvi] Плоскими (планиметрическими) называли задачи, разрешаемые с помощью прямых и окружностей.Этот термин возник у греков и связан с тем, что такие задачи, приводящие к уравнениям второй степени, выражались древними с помощью отношений между площадями, лежащими в плоскости. Отсюда термин «плоское место». Телесными называли задачи, разрешаемые с помощью конических сечений (т.к. они приводят к уравнениям 3-й и 4-й степеней и выражаются отношениями между параллелепипедами). Отюда же термин «телесное место».

[xxvii] Сложное, или составное отношение соответствовало у древних нашему произведению отношений. Так, составленное из двух отношений *a:b* и *b:c* сложное отношение представляло a:c. То, что теперь называют произведением двух или трех чисел, греки выражали с помощью площадей прямоугольников или объемов параллелепипедов, либо с помощью таких же сложных соотношений. Последний способ имел то преимущество, что был пригоден при любом числе сомножителей. См. Цейтен, ч. I, с. 103–105. Выражение «прямоугольник» вместо «произведение» удержалось вплоть до XVII в. – Пояснение А.П. Юшкевича о термине «прямоугольник» см. Декарт, «Геометрия», рус. изд., с. 209.

[xxviii] Вот как излагает этот вопрос Декарт в первой книге своей Геометрии (рус. изд., с.18-20, пер. А.П. Юшкевича): «Папп переходит к одному вопросу, который, по его словам, не могли полностью решить ни Эвклид, ни Аполлоний, ни кто-либо другой. Вот его собственные слова: “Однако, вопрос о геометрическом месте к трем или четырем линиям, который, по словам Аполлония в его III книге, не был разрешен с достаточной полнотой Эвклидом, не смог быть разрешен до конца ни им самим, ни кем-либо другим. Не было даже ничего добавлено к тому, что написал об этом Эвклид, – по крайней мере, если говорить лишь об исследованных во времена Эвклида конических сечениях и т.д.”

И несколько дальше он [Папп] поясняет, в чем состоит этот вопрос: “Вот каково то место к трем или четырем линиям, по поводу которого Аполлоний расточает себе великие похвалы, не обнаруживая никакой благодарности к своему предшественнику. Если даны по положению три прямые и из одной и той же точки проведены под данными углами к этим трем прямым другие три прямые и если дано отношение прямоугольника, построенного на двух из проведенных прямых к квадрату третьей, то точка будет находиться на данном по положению телесном месте, т.е. на одном из трех конических сечений. Далее, если провести к четырем данным по положению прямым под данными четыре других прямых и если дано отношение прямоугольника на двух проведенных прямых к прямоугольнику на двух других, то точка также будет находиться на данном по положению коническом сечении. С другой стороны, если прямых будет только две, то установлено, что место будет плоским. В случае же, когда прямых больше четырех, то точка будет находиться на месте, принадлежащем к числу до сих пор неизвестных, которые называют просто линиями и о природе или свойствах которых ничего не известно. Одну из этих линий, не первую, но которая представлялась наиболее очевидной, они построили и показали, что они приносят пользу."

[xxix] Декарт, Геометрия, комм. Юшкевича, с. 214–215: При разборе задачи Паппа одна прямая, горизонтальная, берется за ось у и на ней выбирается начало отсчета. Расстояния точек кривой от нее, отмеряемые в некотором направлении, обозначаются *x*. В примере система берется прямоугольной. Вторая ось не проводится. Начиная с этого примера координаты неизменно обозначаются *x* и *y*. Термины «абсцисса», «ордината» в *Геометрии* Декарта еще не употребляются. Вместо них служат названия "segmens de diametre" и "appliqué par ordre" (в латинском издании quae ad diametrum ordinatim adplicantur). Эти названия связаны с греческой терминологией учения о конических сечениях, к которым и приложен был координатный метод в первую очередь. Аполлоний называл сопряженные с диаметром конического сечения параллельные хорды «по порядку проведенными линиями», а отрезки диаметра между концом его и точками пересечения с сопряженными хордами» – отсекаемыми на диаметре по порядку проведенными» прямыми. В латинском издании Аполлония, данном Федериго Коммандино (1566), эти обороты речи были переведены "ordinatim applicatae" и "quae ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur". Отсюда терминология Декарта. В переписке Декарт употреблял позднее и слово "ordonnée". Слова «абсцисса» и «ордината» ввел в употребление Лейбниц (1675 и 1684 гг., Leibnizens, math. Schrift., т. V, с. 123), ему же принадлежит слово coordinates (1692 г., там же, т. V, с. 268) и применительно не только к прямолинейным, но и к любым криволинейным координатам. Декарт не знает еще отрицательных абсцисс, но отрицательные ординаты ему известны. Вторая ось введена была впервые в 1730 г. в *Commentaires sur la Geometrie de M. Descartes* Кл. Рабюэля (Claude Rabuel, 1669–1728, преподаватель математики в иезуитском колледже в Лионе, о нем: https://hal.science/hal-01572265/document). Он же первый сформулировал печатно правило знаков координат. См. H.Wieleitner, ч. II, вып. 2., с. 26–27, 43–45.

[xxx] Иоганн Худде (Johannes Hudde, Гудде, Хюдде, Johannes van Waveren Hudde, Huddenius, 1628–1704) – нидерландский математик, инженер и государственный деятель Золотого века Нидерландов. Ученик ван Схотена. Основные труды развивают идеи декартовой аналитической геометрии, они посвящены решению алгебраических уравнений и теории экстремальных значений в математическом анализе.

[xxxi] Ян де Витт (Johan de Witt. 1625–1672) – государственный деятель, в 1653 году занявший пост великого пенсионария провинции Голландия. На протяжении двадцати лет, пока он фактически стоял у руля Соединённых Провинций. В годы обучения в Лейденском университете Ян де Витт сочинил один из первых учебников по аналитической геометрии, озаглавленный *Elementa curvarum linearum*.

[xxxii] Указанный трактат помещается в издании Геометрии Декарта, осуществленном в 1649 г. Схоутеном: *Francisci à Schooten. In Geometriam Renati des Cartes Commentarii* – р. 162-336.

[xxxiii] Hendrik van Heuraet (Henrici van Heuraet, 1633–1660?) – голландский математик, известен как один из основоположников интеграла и автор книги *Epistola de Transmutatione Curvarum Linearum in Rectus* [*О преобразовании кривых в прямые линии*] (1659 г.). С 1653 года учился в Лейденском университете, где общался с Франсом ван Скутеном, Йоханнесом Худде и Христианом Гюйгенсом. В 1658 году он и Худде уехали в Сомюр во Францию. В следующем году он вернулся в Лейден в качестве врача. После этого его след теряется.

[xxxiv] H. a Heuraet. *Epistola de curvarum linearum in Rectas Transmutatione*. 1659. Это письмо можно найти на стр. 517–523 издания *Geometria à R. Descartes*. 1659. Том I. Epistola Doct. Johannis Wallisii, Primam Inventionem & Demonstractionem Aequalitatis lineae Curvae Paraboloidis cum Recta, anno 1657. Factam, Dn. Guilielmo Neile p.m. afferens; proximeque Dn. Christophoro Wren Equiti, Inventionem lineae Rectae aequalis Cycloidi eiusque partibus, anno 1658. (p.6146) // Epistola Doct. Johannis Wallisii, Primam Inventionem & Demonstrationem Aequalitatis Lineae Curvae Paraboloidis cum Recta, Anno 1657. Factam, Dn. Guilielmo Neile p. m. Afferens; Proximeque Dn. Christophoro Wren Equiti, Inventionem. https://archive.org/details/paper-doi-10_1098_rstl_1673_0050/mode/2up?view=theater

[xxxv] *Salmurio – город* Saumur, см. *Oeuvres complètes de Christiaan Hugens*. Tome deuxième correspondance 1657–1659. N° 587– Fr. van Schooten a Christiaan Huvgens. 13 février 1659. La lettre se trouve à Leiden, coll. Huygens, Elle est ht réponse tu: Nu. 582. https://archive.org/stream/oeuvrescompltesd02huyg/oeuvrescompltesd02huyg_djvu.txt Christiaan Huygens. *Oeuvres complètes.* Tome II. Correspondance 1657–1659(1889). No 587. Fr. van Schooten à Christiaan Huygens.13 février 1659. La lettre se trouve à Leiden, coll. Huygens. Elle est la réponse au No. 582. https://www.dbnl.org/tekst/huyg003oeuv02_01/huyg003oeuv02_01_0222.php

[xxxvi] René de Sluse, Renato Francisco Slusio, R.F. de Sluse, René François Walter de Sluse, ook wel René François Walter, baron De Sluse – Ренато Франциско Слузио (1622–1685), математик, каноник Льежский (Валлония, Бельгия). Состоял в переписке с Х. Гюйгенсом, см. https://nl.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_de_Sluse. Учился в инженерной школе Лейдсе у Франса ван Скутена де Ауде. См. также подробную биографию в https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sluze/. Переписывался со многими математиками Англии, Франции и других европейских стран, например, поддерживал регулярные контакты с Блезом Паскалем, Христианом Гюйгенсом и Джоном Уоллисом. Де Слюз написал Христиану Гюйгенсу 14 марта 1658 года по поводу интегрирования циссоиды, или, скорее, на языке того времени, ее квадратуры или нахождения площади под кривой. Эта работа была вдохновлена Мерсенном, который сообщил им о решении Торричелли проблемы вычисления объема твердого тела, образующегося при вращении гиперболы вокруг оси.

[xxxvii] В 1659 году де Слюз опубликовал *Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum et ellipsim vel hyperbolam infinitis modis exhibitae* (Мезолябия или два средних пропорциональных между крайними, заданными кругом и эллипсом или гиперболой, показанные бесконечным количеством способов). Эта работа была посвящена геометрическому построению, в которой он обсуждал кубатуру различных твердых тел и решения уравнений третьей и четвертой степени, которые он получил геометрически, используя пересечение любого конического сечения с кругом.

[xxxviii] Thomas Baker, Томас Бейкер, чл. Королевского Общества, (ок.1625–1689) – английский математик, известный тем, что нашел решение биквадратных уравнений. В 1684 году он опубликовал *Geometrical Key, or Gate of Equations Unlocked* (*Геометрический ключ, или Раскрытые врата уравнений*). Ведущая идея работ Бейкера – решение биквадратных уравнений (и уравнений более низкой степени) с помощью геометрической конструкции – параболы, пересекаемой окружностью. Этот метод отличается от метода Декарта тем, что не требует предварительного устранения из уравнения второго члена. Общий принцип разработан очень подробно; автор придерживается мнения, что лаконичность, подобная «часам, задуманным внутри узкой сферы печатки кольца», скорее достойна восхищения, чем полезна. См. Edgeworth, Francis Ysidro (1885). "Baker, Thomas (1625?–1689)". In Stephen, Leslie (ed.). Dictionary of National Biography. Vol. 3. London: Smith, Elder & Co. p. 17.

[xxxix] Иоганн Христоф Штурм, Johann Christoph Sturm (1635–1703) – немецкий математик, астроном, физик, протестантский схоластический философ. Опубликовал учебники по математике: «Mathesis juvenilis» (1702), «Mathesis enucleata» (1705) и «Mathesis compendiaria sive tyrocinia mathematica» (1714).

[xl] Strode, Thomas, Томас Стройд, математик (после 1642–1688). Работал в университете т Оксфорда. Автор *De Sectionibus Conicis. Nova Methodo* и других математических сочинений.

[xli] Philippe de La Hire (Lahire, La Hyre, Phillipe de La Hire, 1640–1718) – французский художник, математик, астроном и архитектор, член Парижской академии наук. Ла Гир написал о графических методах (1673), о конических сечениях (1685), трактат об эпициклоидах (1694), о рулеттах (1702), о конхоидах (1708). Его работы по коническим сечениям и эпициклоидам основывались на учении Дезарга, любимым учеником которого он был.

[xlii] Этим Анонимом был Б. Паскаль. В 1658 году Паскаль решил задачу о площади любого сегмента циклоиды и центре тяжести любого сегмента, а также проблемы объема и площади поверхности тела вращения, образующегося при вращении циклоиды вокруг оси. Паскаль опубликовал задание под псевдонимом «Деттонвиль», предлагая два приза за решение этих задач, и передал эти призы вместе со своими собственными решениями своему другу Каркави. Он попросил Каркави и Роберваля оценить представленные решения, продемонстрировав свое уважение к математическим способностям Каркави.

[xliii] Pierre de Carcavi (1600/1603–1684) – французский математик-любитель, который больше известен своей перепиской с другими математиками (Ферма, Декарт, Роберваль, Мерсенн, Паскаль, Галилей, Торричелли, Гюйгенс), чем своими результатами. Дружба Каркави с Паскалем, как и дружба с Ферма, длилась многие годы. Паскаль также подарил Каркави свою вычислительную машину «Паскалина». Благодаря дружбе с Кольбером и опыту математика, в 1666 году Каркави был избран членом Французской академии наук, создание которой он поддержал.

[xliv] *История Рулетты* написана в октябре 1658 г. и в ней разбираются приоритетные вопросы, в частности, связанные с Робервалем. А результаты Паскаля о циклоиде изложены в написанных в декабре 1658 г. в «Письме (письмах) господину де Каркави».

[xlv] Laloubère, Antoine de (Lalouvère, Antoine de, La Loubère, Antoine de, Lalouera, Lalovera, Laloyera, Antonius, 1600–1664). Иезуит. Математик и геодезист. Был первым ученым, изучившим свойства воздушного винта. Полемика с Паскалем, который называет его Allouerus в *Histoire de la roulette*. Профессор риторики, теологии и математики в Тулузском колледже. Родился в Рие, умер в Тулузе. Автор *Veterum geometria promota in septem de Cycloide libris et in duabus adjectis appendicibus*, 1660, а также *De Cycloide Galilaei et Torricellii propositiones viginti.* [Tolosano in collegio, XII kal. aug. 1658.]. В 1658 году он вступил в громкую полемику с Блезом Паскалем, который обвинил его в плагиате решения Жиля де Роберваля задачи о рулетте. В 1658 году Паскаль объявил приз за задачи о телах, образованных циклоидами (объемы, центр масс), на что Лалубер отправил Паскалю решение, отвергнутое Паскалем как ошибочное. Этот конфликт возродил интерес Лалубера к геометрии – в то время он был профессором богословия – и в 1660 г. он написал *Veterum geometria promota in septem de cycloid libris* .https://en.wikipedia.org/wiki/Antoine_de_Laloub%C3%A8re В своей главной работе 1651 г. Quadratura Circuli он вычисляет объемы и центры тяжести, обращая правило П. Гульдина. Как геометр Лалувер также первым изучил свойства спирали.

[xlvi] Ismaël Boulliau, Исмаэль Буйо, Ismaël Boulliau (1605–1694) – французский астроном-коперниканец. Известен своими работами в области астрономии, математики, метеорологических наблюдений и музыки, в т.ч. *Opus novum ad Arithmeticam infinitorum :libris sex comprehensum*. Paris, 1682. Исаак Ньютон был читателем Буйо (его данные он приводит в Началах). В 1645 г. опубликовал *Astronomia Philolaica*, в которой указал, что сила гравитации подчиняется закону обратных квадратов.

[xlvii] Вероятно, Johann Christoph Sturm (1635–1703) – немецкий философ, профессор Альтдорфского университета. В 1670 г. перевел произведения Архимеда на немецкий язык, Автор *Physica Electiva* (1697), в которой, критиковал Г. В. Лейбница.

[xlviii] И. Ньютон, *Математические начала натуральной философии*, Кн. 1, Отд. 1. *О методе первых и последних отношений, при помощи которого последующее доказывается*. Лемма 1. Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут в пределе равны. *Примечание А.Н. Крылова*. Предельные отношения Ньютон называет или “primae rationes”, т.е «первые отношения», или “ultima rationes”, т. е. «последние отношения», причем первым термином он пользуется при определении предела отношения двух бесконечно малых величин: «зарождающихся» – “nascentium” или «исчезающих» – “evanescentium”. Второй термин применяется безразлично как для предела отношения величин конечных, так и бесконечно малых. Когда две величины в пределе равны, т. е. когда их отношение в пределе равно единице, то употребляется термин “sunt ultime aequales”, т.е. «наконец равны», или “ultima rationes sunt rationes aequalitatis”, т. е. «Последние отношения суть отношения равенства». – с. 57 русского перевода Ньютона.

[xlix] И. Ньютон. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых. *Methodus fluxionum, англ. Method of Fluxions*, посмертно издан в 1736 г., написан в 1671 г.

[l] И. Ньютон. *Рассуждение о квадратуре кривых* (*Tractatus de quadratura curvarum*, 1704), приложение к *Оптике*.

[li] Bernhardi Nieuwentiit (Bernard Nieuwentijdt, 1654–1718) – голландский врач, философ и математик, один из наиболее важных голландских авторов эпохи Просвещения. Первоначально последователь Декарта, затем его оппонент. В 1694 Ньювентийт опубликовал сочинение математическую тему и подвергся нападкам со стороны Лейбница и Бернулли. Автор *Analysis Infinitorum, seu Curvilineorum proprietates Ex Polygonorum Natura Deductae*. Wolters (Amstelaedami).

[lii] Осенью 1691 г. Иоганн Бернулли приехал в Париж. Там он был тепло принят в кружке интеллектуалов картезианца Николя Мальбранша, который заинтересовался методом Лейбница для определения кривизны кривых. В Париже Бернулли-младший заключил контракт на обучение математике маркиза Лопиталя. Маркиз, в свою очередь, в конце 1692 г. написал письмо Лейбницу, из которого следовало, что уже в конце 1688 г. он познакомился со статьёй немецкого математика. В период своего пребывания в Париже Бернулли обучил методу Лейбница нескольких членов кружка Мальбранша: священника Луи Бизанса и математиков Шарля Рене Рейно, Пьера де Монмора и Пьера Вариньона. В 1696 г. Лопиталь, которого покинувший Францию Бернулли продолжал обучать по переписке, издал первый учебник математического анализа, охватывающий вопросы дифференцирования. Книга имела большой успех и упрочила славу маркиза как математика.

[liii] Joh. Christoph. Sturm. *Mathesis enucleata, cujus praecipua contenta sub finem praefationis, uno quasi obtutu spectanda, exhibentur.* (Элементы математики, Разъяснение математики). Typis & impensis Wolfgangi Maurittii Endteri, 1689.

[liv] Возможно, Герман неверно указывает год второго издавния: *Mathesis enucleata, or, The elements of the mathematicks by J. Christ. Sturmius*. London: Printed for Robert Knaplock and Dan. Midwinter and Tho. Leigh, 1700. Все издания книг Штурма см. здесь: https://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupname?key=Sturm%2C%20Johann%20Christophorus%2C%201635%2D1703

[lv] Louis Carré (1663–1711) – французский математик и член Французской академии наук. Ученик П. Вариньона. Автор одной из первых книг по интегральному исчислению *Une méthode pour Ia mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion, et d'oscillation par l'application du calcul integral* (1700).

[lvi] George Cheyne (Georgius Cheyneus, 1672–1743), шотландский и британский медик и математик. Друг Исаака Ньютона (до ссоры). Опубликовал сочинение *Fluxionum Methodus Inversa* (Lond. 1703, 4to), вызвавшее полемику с А. Муавром, в ответ Чейни опубликовал *Rudimentorum methodi Fluxionum Inversrœ specimina, ad versus Abr. de Moivre* (Lond. 1705). Пытался объединить математику, теологию и медицину.

[lvii] Methodo Fluxionum inversa, т. е. обратное по отношению к дифференцированию действие, а именно интегрирование.

[lviii] Gabriele Manfredi (1681–1761), итальянский математик. Автор трактата *De constructione aequationum differentialium primi gradus*, 1707. Заинтересовался трудами Декарта, изучал работы Лейбница, а также Иоганна и Якоба Бернулли по исчислению бесконечно малых. Опубликовал также статью *Breve schediasma geometrico per la costruzione di una gran parte delle equazioni differenziali di primo grado* (1714), где описана процедура интегрирования однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

[lix] *Isaaci Newtoni Tractatus duo, de speciebus et Magnitudine Figurarum Curvilinearum* (Два трактата Исаака Ньютона о видах и величине кри-

волинейных фигур). Acta Eruditorum, 1705. January. – p. 30-35. Статья без подписи, но вероятнее всего, написала Лейбницем. В статье утверждается, что метод флюксий до Ньютона до него был разработан Б.Кавальери и О.Фабри. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1a/Acta_eruditorum._1705_%28IA_s1id13206740%29.pdf

[lx] Джон Кейлл (John Keill, 1671–1721), шотландский математик, натурфилософ и криптограф. С 1708 г. опубликовал ряд статей в *Philosophical transactions* в защиту Ньютона в качестве опровержения упомянутой статьи 1705 г.

[lxi] John Collins (1625–1683) – английский математик. Наиболее известен своей обширной перепиской с ведущими учеными и математиками, такими как Дж. А. Борелли, Г. Лейбниц, И. Ньютон и Дж. Валлис. Его переписка содержит подробную информацию о многих открытиях и разработках, сделанных в его время. Возможно, Герман ошибается в датах и участие Коллинза в этой дискуссии посмертное: известно, что в дискуссии о приоритете использовался архив Коллинза. В 1713 г. был издан сборник *Commercium epistolicum D. Johannis Collis, et aliorum de analysi promota* (*Переписка учёного Джона Коллинза и прочее относящееся к открытию анализа*). *Commercium epistolicum* содержал ранее известные тексты, снабжённые пояснениями, акцентирующими внимание читателя на воровстве чужих идей, регулярно практикуемом, по мнению автора, Лейбницем. Заключение комиссии Королевского общества гласило: «по этим основаниям мы считаем Ньютона первым изобретателем». См. «Спор о приоритете» https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%BE%D1%80_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0_%D0%B8_%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%B8%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%82%D0%B5

Информация об авторе

Синкевич Галина Ивановна, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математики
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (СПбГАСУ)
190005, С.-Петербург, Российская Федерация, 2-я Красноармейская, 4

Information about author

Sinkevich Galina Ivanovna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Department of Mathematics
St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
190005, St.-Petersburg, Russian Federation, 2-th Krasnoarmeyskaya, 4